УДК 519.714.3

© 2001 г. С.Н. Петраков

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЯМЫХ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Построение достаточных условий существования эквивалентных прямых механизмов планирования проводится при помощи метода анализа множеств диктаторства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее распространенных задач, возникающих при исследовании механизмов функционирования активных систем с сообщением информации [1], является проблема сообщения достоверной информации (неманипулируемости) в механизмах планирования, в которых в результате обмена информацией между участниками активной системы (АС): управляющим органом – центром и подчиненными ему активными элементами (АЭ) центр проводит выбор скалярных параметров – планов, регламентирующих деятельность АЭ.

Если в качестве информации, передаваемой от АЭ центру, служат сообщения об оптимальных планах (прямые механизмы планирования) или их оценки из некоторого подмножества допустимых планов (непрямые механизмы планирования), то наиболее привлекательно для центра использование прямых неманипулируемых механизмов планирования [1,2], условия неманипулируемости которых приведены в [1,3-6].

В ряде случаев использование прямых механизмов планирования приводит к потере эффективности управления [1], что обуславливает необходимость характеризации АС, в которых центр при выборе механизмов планирования может использовать прямые механизмы.

Один из методов решения этой задачи – построение для заданного непрямого механизма планирования соответствующего ему прямого механизма, который может считаться эквивалентным исходному механизму при условии сообщения АЭ в прямом механизме достоверной информации.

Несмотря на то, что задача поиска эквивалентного прямого механизма сводится к исследованию его неманипулируемости, конструктивные условия существования эквивалентных прямых механизмов построены лишь для ограниченного числа частных случаев [1,2].

Оказывается, что для прямых механизмов планирования в АС с обобщенно однопиковыми функциями полезности [7] множество возможных предпочтений разбивается на множества диктаторства [7,8], в которых определенные группы элементов получают планы большие, меньшие либо равные оптимальным. Вводимое в настоящей работе условие нормальности множеств диктаторства позволяет гарантировать неманипулируемость исследуемых прямых механизмов.

Используя метод анализа множеств диктаторства прямых механизмов [7,8], удается построить условия существования эквивалентных прямых механизмов, которые, однако, недостаточно конструктивны и требуют дальнейшего упрощения [8]. В настоящей работе строятся конструктивные достаточные условия существования эквивалентных прямых механизмов для линейных и дифференцируемых непрямых механизмов планирования.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим многоэлементную двухуровневую АС, состоящую из центра и n АЭ. АЭ направляют в центр сообщения, по которым центр назначает скалярные планы.

Обозначим: $I = \{1, ..., n\}$ – множество всех АЭ, x_i - план i-го АЭ из множества возможных планов X_i, s_i - сообщение i-го АЭ из множества возможных сообщений S_i. План i-го АЭ определяется процедурой планирования $x_i = g_i(s)$, где $s = (s_1, ..., s_n) \in S = \prod_{i \in I} S_i$. Вектор планов обозначим через $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$. Механизм планирования определяется как совокупность процедуры планирования и множества возможных сообщений (g, S).

Интересы каждого АЭ выражены функцией полезности $j_i(x_i)$, которая зависит только от плана, назначаемого данному АЭ. Набор функций полезности всех АЭ $(j_1, ..., j_n)$ обозначим через j.

Относительно параметров АС введем следующие предположения:

А.1. $\forall i \in I\ X_i = R^1, S_i = [0, 1]$;

А.2. Функции полезности АЭ $j_i(x_i)$ являются обобщенно однопиковыми, т.е. такими, что существует точка $r_i \in R^1$ такая, что $\forall x_i \neq r_i$, $j_i(r_i) > j_i(x_i)$ и $j_i(x_i)$ не убывает по x_i при $x_i < r_i$ и не возрастает по x_i при $x_i > r_i$, $i \in I$. Точка r_i называется точкой пика (или идеальной точкой) функции полезности $j_i(x_i)$.

А.3. Процедура планирования $g : S \to R^n$ непрерывна в S и частично монотонна, т.е. такова, что для любых $i \in I$, для любых $s_{-i} \in [0, 1]^{n-1}$ и для любых $s_i', s_i'' \in [0, 1]$ таких, что $s_i' \geq s_i''$, выполнено $g_i(s_i', s_{-i}) \geq g_i(s_i'', s_{-i})$.

Класс всех обобщенно однопиковых функций обозначим через *GSP*, вектор точек пиков всех АЭ $(r_1, ..., r_n) \in R^n$ обозначим через r.

В соответствии с результатами [8], для каждого вектора функций полезности АЭ $j \in GSP^n$ в механизме планирования с непрерывной и частично монотонной процедурой планирования найдется равновесие Нэша такое, что вектор равновесных сообщений $s^*(r)$ зависит только от положения точек пиков функций полезности АЭ. В положении равновесия вектор планов АЭ определяется при помощи процедуры планирования $x = g(s^*(r))$.

Так как полезность каждого АЭ определяется обобщенно однопиковой функцией, то для каждого АЭ можно ввести его состояние $r_i \in \wp$, $\wp = \{a, c, m\}$, $i \in I$ такое, что $r_i = a$, если $g_i(s^*(r)) > r_i$, $r_i = c$, если $g_i(s^*(r)) = r_i$, $r_i = m$, если $g_i(s^*(r)) < r_i$. Вектор состояний всех АЭ обозначим через $r \in \wp^n$ [7]. Содержательно состояние $r_i = c$ соответствует тому, что АЭ назначается оптимальный для него план, состояние $r_i = m$ соответствует плану, меньшему оптимального, состояние $r_i = a$ соответствует плану, большему оптимального.

Введем соответствия $M(r) = \{j \in I : r_j = m\}$, $C(r) = \{j \in I : r_j = c\}$, $A(r) = \{j \in I : r_j = a\}$, $r \in \wp^n$ [7]. Очевидно, для каждого r подмножества $C(r)$, $A(r)$, $M(r)$ являются разбиением множества всех элементов I.

Пусть задан вектор $x \in R^n$ и подмножество $J \subseteq I$. Будем обозначать через x_J вектор размерности $|J|$ с компонентами вектора x, соответствующим элементам подмножества J.

Для каждого $r \in \wp^n$ определим отношение $< r >$ над R^n так, что для $x, y \in R^n$ выполнено $x < r > y$ если $x_i > y_i$, $i \in M(r)$, $x_i < y_i$, $i \in A(r)$, $x_i = y_i$, $i \in C(r)$. Для каждого вектора $r \in \wp^n$ АЭ из множества $C(r)$ назовем диктаторами [7].

Кроме отношения $< r >$ определим над R^n отношение $< \overline{r} >$ и будем записывать $x < \overline{r} > y$, если $x_i \geq y_i$, $i \in M(r)$, $x_i \leq y_i$, $i \in A(r)$, $x_i = y_i$, $i \in C(r)$.

Для каждого вектора состояний $r \in \wp^n$ определим вектор $s^r_{-C(r)}$ размерности $|I \setminus C(r)|$ следующим образом: $s_i^r = 0, i \in A(r)$; $s_i^r = 1, i \in M(r)$.

В соответствии с результатами [8] для непрерывных и частично монотонных процедур планирования и любого вектора функций полезности АЭ $j \in GSP^n$ с вектором точек пиков $r \in R^n$ существуют равновесие Нэша $s^*(r)$, зависящее только от положений точек пиков, и вектор состояний $r \in \wp^n$ такие, что $s^*(r) = (s^r_{-C(r)}, s_{C(r)})$ и $r < r > g(s^*(r))$, где $s_{C(r)} \in [0,1]^{|C(r)|}$.

Для каждого вектора состояний определим множества

$$S_r = \{s \in R^n : s_{C(r)} \in [0,1]^{|C(r)|}, s < r > (s_{C(r)}, s^r_{-C(r)})\},\ r \in \wp^n.$$

Для функции $g:[0,1]^n \to R^n$ определим «соответствующую» ей функцию $G: R^n \to R^n$ следующим образом. Рассмотрим произвольный вектор $s \in R^n$. Для произвольного $J \subseteq I$ под $g_J(s)$ будем понимать соответствующие компоненты образа $g(s)$. Очевидно, существует единственный вектор $r \in \wp^n$ такой, что $s \in S_r$. В точке s определим функцию $G(s)$ таким образом, что $G_{C(r)}(s) = g_{C(r)}(s^r_{-C(r)}, s_{C(r)})$ и $G_{-C(r)}(s) = g_{-C(r)}(s^r_{-C(r)}, s_{C(r)}) + (s_{-C(r)} - s^r_{-C(r)})$.

Назовем <u>множествами диктаторства</u> следующие множества

$$D_r = \{\tilde{r} \in R^n : \tilde{r} < r > g(s^*(\tilde{r}))\},\ r \in \wp^n.$$

Будем говорить, что множество диктаторства D_r, $r \in \wp^n$ является нормальным, если для всех $r \in D_r$ и для всех $\tilde{r} \in R^n$ таких, что $\tilde{r} < r > g(s^*(r))$, выполняется $\tilde{r} \in D_r$ и $g(s^*(\tilde{r})) = g(s^*(r))$. Определим множества $\overline{D}_r = \{\tilde{r} \in R^n : \tilde{r} < \overline{r} > g(s^*(\tilde{r}))\}$, $r \in \wp^n$.

Для механизма планирования (g, S) построим соответствующий ему прямой механизм (h, R^n) так, что $h(r) = g(s^*(r))$. В таком механизме сообщением каждого АЭ будет информация о положении своей точки пика $r_i \in R^n$. Если в механизме планирования $h(r)$ сообщение достоверной информации о положениях точек пика является равновесием Нэша, то говорят, что для исходного механизма планирования (g, S) существует эквивалентный ему прямой механизм планирования (h, R^n).

В [7,8] доказано, что если множества диктаторства исходного механизма (g, S) нормальны, то для него существует эквивалентный ему прямой механизм планирования.

Для непрямых механизмов планирования общего вида следующие условия С.1-С.3 гарантируют нормальность его множеств диктаторства и, следовательно, существование эквивалентного прямого механизма [8].

С.1. Для любых $r \in R^n$ и для любых $r \in \wp^n$ таких, что $r_{C(r)} \in g_{C(r)}(s^r_{-C(r)}, [0,1]^{|C(r)|})$, отображение $g(s^r_{-C(r)}, g^{-1}_r(r_{C(r)}))$ однозначно, где $g^{-1}_r(r_{C(r)})$ таково, что $r_{C(r)} = g_{C(r)}(s^r_{-C(r)}, g^{-1}_r(r_{C(r)}))$.

Определим векторы состояний $M^i \in \wp^n$ и $A^i \in \wp^n$, $i \in I$ таким образом, что $M^i_j = c$ для всех $j \in I \setminus \{i\}$, $M^i_i = m$ и $A^i_j = c$ для всех $j \in I \setminus \{i\}$, $A^i_i = a$. Тогда $C(M^i) = I \setminus \{i\}$, $M(M^i) = \{i\}$ и $C(A^i) = I \setminus \{i\}$, $A(A^i) = \{i\}$.

С.2. Для любых $i \in I, r_{-i} \in R^{n-1}$ соответствия $G(s^{M^i}, G^{-1}_{M^i}(r_{-i}))$ и $G(s^{A^i}, G^{-1}_{A^i}(r_{-i}))$ однозначны, где $G^{-1}_{M^i}$ и $G^{-1}_{A^i}$ обозначают обратные соответствия для функций $G_{-i}(s^{M^i}_i, s_{-i})$ и $G_{-i}(s^{A^i}_i, s_{-i})$.

С.3. для любых $i \in I$ и для любых $s : s_i \in [0,1]$ выполняется

$$G_i(s^{M^i}_i, G^{-1}_{M^i}(G_{C(M^i)}(s))) \geq G_i(s) \geq G_i(s^{A^i}_i, G^{-1}_{A^i}(G_{C(A^i)}(s))).$$

Т е о р е м а 1 [8]. *Пусть* $j_i \in GSP$, $i \in I$, $g(s)$ *непрерывна и частично монотонна в* S *и выполнены предположения С.1-С.3. Тогда для механизма планирования* $g(s)$ *множества диктаторства* $D_r = G(S_r)$, $r \in \wp^n$, *нормальны и соответствующий* $g(s)$ *прямой механизм неманипулируем.*

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЯМЫХ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ ЧАСТНОГО ВИДА

Условия С.1-С.3 существования эквивалентного прямого механизма, хотя и являются достаточно общими, недостаточно конструктивны и требуют упрощения. Простой вид они принимают для дифференцируемых и линейных процедур планирования.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции полезности АЭ из множества* I *обобщенно однопиковые, процедура планирования* $g : S \to R^n$ *дважды непрерывно дифференцируема в* S, *для любых* $r \in \wp^n$ *и* $\tilde{s}_{-C(r)} \in [0,1]^{|-C(r)|}$

функции $g_{C(r)}(s_{C(r)}, \tilde{s}_{-C(r)})$ *глобально обратимы на множестве* $s_{C(r)} \in [0,1]^{|C(r)|}$, *матрица Якоби* $J(s) = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial s_j}(s) \right\|$ *имеет положительные диагональные миноры для всех* $s \in S$. *Тогда для механизма, определяемого* $S = [0,1]^n$ *и процедурой* $g : S \to R^n$, *существует эквивалентный прямой механизм.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть задана числовая матрица* A *размерности* $n \times n$ *и механизм планирования с процедурой планирования* $x = As + x_0$, $s \in [0,1]^n$, $x_0 \in R^n$. *Если все диагональные миноры матрицы* A *больше нуля, то для механизма, определяемого* $S = [0,1]^n$ *и процедурой* $x = As + x_0$, $s \in [0,1]^n$, *существует эквивалентный прямой механизм.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть процедура планирования* $g : S \to R^n$ *дважды непрерывно дифференцируема в* S *и матрица Якоби* $J(s) = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial s_j}(s) \right\|$ *положительно определена для всех* $s \in S$. *Тогда для механизма, определяемого* $S = [0,1]^n$ *и процедурой* $g : S \to R^n$, *существует эквивалентный прямой механизм.*

С л е д с т в и е 3. *Пусть* $n = 2$, *процедура планирования* $g(s)$ *дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\frac{\partial g_i}{\partial s_i}(s) > 0,\ \forall s \in [0,1]^2;$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s_1}(s) & \frac{\partial g_1}{\partial s_2}(s) \\ \frac{\partial g_2}{\partial s_1}(s) & \frac{\partial g_2}{\partial s_2}(s) \end{pmatrix} > 0,\ \forall s \in [0,1]^2.$$

Тогда для механизма, определяемого $S = [0,1]^2$ *и процедурой* $g : S \to R^2$, *существует эквивалентный прямой механизм.*

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении. Доказательства следствий 1-3 очевидны при использовании результатов о существовании обратной функции для непрерывной функции одного переменного [9], разрешимости систем линейных уравнений [10] и глобальной обратимости функций [11].

Теорема 2 дает удобные достаточные условия существования эквивалентных прямых механизмов планирования. Эти условия не могут быть непосредственно применены, например, для механизмов активной экспертизы и распределения ресурса в общем виде [2], тем не менее они значительно расширяют класс механизмов планирования, для которых легко устанавливается существование эквивалентных прямых механизмов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение метода множеств диктаторства позволило получить достаточные условия существования эквивалентного прямого механизма для исходного непрямого механизма планирования общего вида. Несмотря на сложность применения предположений С.1-С.3 к исследованию проблемы существования эквивалентных прямых механизмов для механизмов частного вида, при помощи этих условий удается получить более простые и конструктивные условия существования эквивалентного прямого механизма для линейных и нелинейных механизмов планирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Л е м м а 1. *Пусть A - квадратная матрица размерности $n \times n$. Для заданного вектора $g \in \wp^{m-1}$ определим квадратную матрицу A^g размерности $n \times n$ как матрицу, составленную из элементов матрицы $A_{I|C(g)}$ и $E_{I|-C(g)}$, где $A_{K|J}$, $K, J \subseteq I$ обозначает подматрицу размерности $|K| \times |J|$ матрицы A со столбцами, соответствующими элементам множества J, и строками, соответствующими элементам множества K.*

Справедливо следующее равенство

$$A_{\{i\}|\{i\}} - A^g_{\{i\}|I\setminus\{i\}}\left[A^g_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\right]^{-1} A_{I\setminus\{i\}|\{i\}} = \frac{\det(A_{C(g)\cup\{i\}|C(g)\cup\{i\}})}{\det(A_{C(g)|C(g)})}.$$

Доказательство леммы 1.

$$\left[A^g_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\right]^{-1}_{k,l} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{i_l+j_k} M_{l,k}(A_{C(g)|C(g)})}{\det(A_{C(g)|C(g)})}, l \in C(g); \\ (-1)^{i_l+j_k} d_{l,k}, l \in C(g). \end{cases}$$

Тогда

$$A_{\{i\}|\{i\}} - A^g_{\{i\}|I\setminus\{i\}}\left[A^g_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\right]^{-1} A_{I\setminus\{i\}|\{i\}} = a_{i,i} - \sum_{\substack{k \in C(g) \\ l \in C(g)}} a_{i,k} \frac{(-1)^{i_l+j_k} M_{l,k}(A_{C(g)|C(g)})}{\det(A_{C(g)|C(g)})} a_{l,i} =$$

$$= a_{i,i} - \sum_{\substack{k \in C(g) \\ l \in C(g)}} a_{i,k} \frac{(-1)^{i_l+j_k} M_{l,k}(A_{C(g)|C(g)})}{\det(A_{C(g)|C(g)})} a_{l,i} = \frac{\det(A_{C(g)\cup\{i\}|C(g)\cup\{i\}})}{\det(A_{C(g)|C(g)})}.$$

Доказательство теоремы 2. 1) Проверим выполнение условия С.1. Рассмотрим произвольный вектор $r \in R^n$ и произвольный $r \in \wp^n$ и пусть

$$r_{C(r)} \in g_{C(r)}(s^r_{-C(r)}, [0,1]^{|C(r)|}).$$

Уравнение $r_{C(r)} = g_{C(r)}(s^r_{-C(r)}, s_{C(r)})$ имеет единственное решение в силу условия теоремы.

Тогда соответствие

$$g(s^r_{-C(r)}, g_r^{-1}(r_{C(r)}))$$

однозначно и условие С.1 выполнено.

2) Проверим выполнение условия С.2. Доказательство проведем по индукции. Легко показать, что для механизмов $g(s)$ с одним АЭ, удовлетворяющих условиям теоремы, условия С.1-С.3 выполнены. Пусть для механизмов $g_{I\setminus\{i\}}(s_i^{A^i}, s_{I\setminus\{i\}})$, $g_{I\setminus\{i\}}(s_i^{M^i}, s_{I\setminus\{i\}})$ с количеством АЭ $|I|-1$ условия С.2-С.3 выполнены. Докажем, что для механизма $g(s)$, удовлетворяющего условиям теоремы, выполнены условия С.2-С.3.

Рассмотрим механизм $g_{I\setminus\{i\}}(s_i^{A^i}, s_{I\setminus\{i\}})$ и векторы состояний $g \in \wp^{n-1}$ для этого механизма. Тогда по теореме 1 для механизма $g_{I\setminus\{i\}}(s_i^{A^i}, s_{I\setminus\{i\}})$ множества диктаторства D_g , $g \in \wp^{n-1}$ нормальны и образуют разбиение R^{n-1}.

Допустим, существует $r_{-i} \in R^{n-1}$ такой, что $G(s^{A^i}, G_{M^i}^{-1}(r_{-i}))$ неоднозначно. Так как множества диктаторства образуют разбиение R^{n-1}, то существует единственный вектор состояний $\hat{g} \in \wp^{n-1}$ такой, что $r_{-i} \in D_{\hat{g}} = G(S_{\hat{g}})$. Тогда система уравнений

$$r_{-i} = g_{I\setminus\{i\}}(s_i^{A^i}, s_{C(\hat{g})}, s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}) + E_{I\setminus\{i\}|-C(\hat{g})}(s_{-C(\hat{g})} - s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}})$$

имеет несколько различных решений. Найдем решение подсистемы данной системы уравнений:

$$r_{C(\hat{g})} = g_{C(\hat{g})}(s_i^{A^i}, s_{C(\hat{g})}, s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}).$$

В силу условий теоремы данная подсистема уравнений имеет единственное решение, т.е. существует единственный $\hat{s}_{C(\hat{g})}$ такой, что $r_{C(\hat{g})} = g(s_i^{M^i}, s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}, \hat{s}_{C(\hat{g})})$. При этом однозначно определяется решение подсистемы $r_{-C(\hat{g})} = g_{-C(\hat{g})}(s_i^{M^i}, s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}, \hat{s}_{C(\hat{g})}) + \hat{s}_{-C(\hat{g})} - s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}$

$$\hat{s}_{-C(\hat{g})} = g_{-C(\hat{g})}(s_i^{M^i}, s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}, \hat{s}_{C(\hat{g})}) - r_{-C(\hat{g})} - s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}.$$

Таким образом, уравнение

$$r_{-i} = g_{I\setminus\{i\}}(s_i^{A^i}, s_{C(\hat{g})}, s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}}) + E_{I\setminus\{i\}|-C(\hat{g})}(s_{-C(\hat{g})} - s_{-C(\hat{g})}^{\hat{g}})$$

имеет единственное решение и отображение $G(s^{M^i}, s_{-i})$ глобально обратимо, а значит, $G(s^{M^i}, G_{M^i}^{-1}(r_{-i}))$ однозначно. Аналогично доказывается однозначность соответствия $G(s^{A^i}, G_{A^i}^{-1}(r_{-i}))$.

3) Необходимо доказать, что $\forall i \in I, \forall s \in R^2 : s_i \in [0,1]$ выполнено

$$G_i(s_i^{M^i}, G_{M^i}^{-1}(G_{C(M^i)}(s))) \geq G_i(s) \geq G_i(s_i^{A^i}, G_{A^i}^{-1}(G_{C(A^i)}(s))).$$

Рассмотрим набор промежуточных поверхностей

$$G\left(s_i^{A^i}+\frac{n}{m},s_{C(A^i)}\right),\ s_{C(A^i)}\in[0,1]^{n-1}$$

и докажем, что поверхность $G\left(s_i^{A^i}+\frac{n+1}{m},s_{C(A^i)}\right)$ лежит выше поверхности $G\left(s_i^{A^i}+\frac{n}{m},s_{C(A^i)}\right)$, т.е. для любых $i\in I$ и $s\in R^n$ таких, что $s_i\in\left[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}\right]$ выполнено неравенство

$$G_i\left(s_i^{A^i}+\frac{n+1}{m},G^{-1}_{s^{A^i}+\frac{n+1}{m}}\left(G_{C(M^i)}(s)\right)\right)\ge G_i(s)\ge G_i\left(s_i^{A^i}+\frac{n}{m},G^{-1}_{s^{A^i}+\frac{n}{m}}\left(G_{C(A^i)}(s)\right)\right).$$

Рассмотрим некоторый фиксированный $\bar{s}_{-i}\in R^{n-1}$ и найдем разность

$$\Delta(\bar{s}_{-i},s_i)=G_i(\bar{s}_{-i},s_i)-G_i\left(s_i^{A^i}+\frac{n}{m},G^{-1}_{s^{A^i}+\frac{n}{m}}\left(G_{C(A^i)}(\bar{s}_{-i},s_i)\right)\right).$$

В силу того, что для любого $\bar{s}_{I\backslash\{i\}}\in R^{n-1}$ найдется единственный $g\in\wp^{n-1}$ такой, что $\bar{s}_{I\backslash\{i\}}\in S_g$,

$$J_{I|\{i\}}\left(\bar{s}_{I\backslash\{i\}},\frac{n}{m}\right)\left(s_i-\frac{n}{m}\right)-M_1\left(s_i-\frac{n}{m}\right)^2\le G(\bar{s}_{I\backslash\{i\}},s_i)-G\left(\bar{s}_{I\backslash\{i\}},\frac{n}{m}\right)\le$$
$$\le J_{I|\{i\}}\left(\bar{s}_{C(g)},s^g_{-C(g)},\frac{n}{m}\right)\left(s_i-\frac{n}{m}\right)+M_1\left(s_i-\frac{n}{m}\right)^2.$$

Рассмотрим механизм планирования с $n-1$ АЭ, определяемый процедурой планирования $\hat{g}(s_{I\backslash\{i\}})=g_{I\backslash\{i\}}\left(s_{I\backslash\{i\}},\frac{n}{m}\right)$, $s_{I\backslash\{i\}}\in[0,1]^{n-1}$. Механизм планирования $\hat{g}(s_{I\backslash\{i\}})$, $s_{I\backslash\{i\}}\in[0,1]^{n-1}$ удовлетворяет условиям теоремы, и в силу индуктивного предположения соответствующая ему функция $\hat{G}(s_{I\backslash\{i\}})=G_{I\backslash\{i\}}\left(s_i^{A^i}+\frac{n}{m},s_{I\backslash\{i\}}\right)$ удовлетворяет С.1-С.3. Множества диктаторства механизма $\hat{g}(s_{I\backslash\{i\}})$ нормальны и $\hat{D}_g=\hat{G}(S_g)$.

Пусть для некоторого $s_i\in\left[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}\right]$ $G_{I\backslash\{i\}}(\bar{s}_{-i},s_i)\in\hat{D}_{\hat{g}}$, где вектор $\hat{g}\in\wp^{n-1}$ существует и единствен в силу того, что выполнено С.2. $\hat{G}_{C(\hat{g})}(s)=g_{C(\hat{g})}(s_{C(\hat{g})},s^{\hat{g}}_{-C(\hat{g})})$, $\hat{G}_{-C(\hat{g})}(s)=g_{-C(\hat{g})}(s_{C(\hat{g})},s^{\hat{g}}_{-C(\hat{g})})+(s_{-C(\hat{g})}-s^{\hat{g}}_{-C(\hat{g})})$. В силу того, что функция $G(\bar{s}_{-i},s_i)$ непрерывна и возрастает по s_i, а функция

$G\left(s_i^{A^i}+\frac{n}{m}, s_{C(A^i)}\right)$ глобально обратима, множества точек $S^{\hat g}=\left\{s_i\in\left[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}\right]\middle|\, G(\bar s_{-i}, s_i)\in\bar{\hat D}_{\hat g}\right\}$ являются объединением замкнутых, непересекающихся отрезков $[s_i^k, s_i^{k+1}]\subseteq\left[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}\right]$, $k\in Q$, $s_i^k<s_i^{k+1}$ [11].

Пусть отрезок $[s_i^0, s_i^1]$ таков, что для любых $s_i\in[s_i^0, s_i^1]$ $G(\bar s_{I\setminus\{i\}}, s_i)\in\bar{\hat D}_{\hat g}$ и s_i^0 и s_i^1 являются граничными точками множества $S^{\hat g}$. Обозначим $r_{I\setminus\{i\}}^0=G_{I\setminus\{i\}}(\bar s_{-i}, s_i^0)$, в силу однозначности $G_{I\setminus\{i\}}\left(s_{I\setminus\{i\}},\frac{n}{m}\right)$ существует и единствен $s_{I\setminus\{i\}}^0\in\bar S_{\hat g}$ такой, что $r_{I\setminus\{i\}}^0=G_{I\setminus\{i\}}\left(s_{I\setminus\{i\}}^0,\frac{n}{m}\right)$. В силу того, что $g(s)$ дважды непрерывно дифференцируема на компакте, существуют константа $M_2'>0$ и окрестность $d_2'>0$ такие, что для любого $r\in U_{d_2'}(r_{I\setminus\{i\}}^0)\cap\bar{\hat D}_{\hat g}$ выполнена следующая оценка

$$G^{-1}_{s_i^{A^i}+\frac{n}{m}}(r_{I\setminus\{i\}})-s_{I\setminus\{i\}}^0\le\left[J^{\hat g}_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m}, s_{I\setminus\{i\}}^0\right)\right]^{-1}(r_{I\setminus\{i\}}-r_{I\setminus\{i\}}^0)+M_2'(r_{I\setminus\{i\}}-r_{I\setminus\{i\}}^0)^2.$$

Аналогично, найдутся $M_2>0$ и окрестность $d_2>0$ такие, что для любых $s_i\in\left[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}\right]$, $\frac{1}{m}<d_2$ будет справедлива следующая оценка:

$$G^{-1}_{s_i^{A^i}+\frac{n}{m}}\left(G_{I\setminus\{i\}}(s)\right)-\left(\frac{n}{m}, s_{I\setminus\{i\}}^0\right)\le$$

$$\le\left[J^{\hat g}_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar s_{I\setminus\{i\}}\right)\right]^{-1}\left[J_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar s_{I\setminus\{i\}}\right)\right](s_i-s_i^0)+$$

$$+B_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}(s_{I\setminus\{i\}}^0-\hat s_{I\setminus\{i\}})(s_i-s_i^0)+M_2(s_i-s_i^0)^2,$$

где $B_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}$ - матрица с элементами, ограниченными константой, не зависящей от $\bar s_{I\setminus\{i\}}$.

Аналогично, найдутся $M_3>0$ и окрестность $d_3>0$ такие, что для любых $s_i\in\left[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}\right]$, $\frac{1}{m}<d_3$ будет справедлива следующая оценка:

$$G_i\left(G^{-1}_{s_i^{A^i}+\frac{n}{m}}\left(G_{I\setminus\{i\}}(s)\right),\frac{n}{m}\right)\le G_i\left(\frac{n}{m},s^0_{I\setminus\{i\}}\right)+$$

$$+\left[J^{\hat{g}}_{\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)\right]\left[J^{\hat{g}}_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)\right]^{-1}\left[J_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)\right](s_i-s_i^0)+$$

$$+C_{\{i\}|I\setminus\{i\}}(s^0_{I\setminus\{i\}}-\hat{s}_{I\setminus\{i\}})(s_i-s_i^0)+M_3(s_i-s_i^0)^2,$$

где $C_{\{i\}|I\setminus\{i\}}$ - матрица с элементами, ограниченными константой, не зависящей от $\bar{s}_{I\setminus\{i\}}$.

Тогда

$$\Delta(\bar{s}_{-i},s_i)-\Delta(\bar{s}_{-i},s_i^0)\ge J_{\{i\}|\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)(s_i-s_i^0)-$$

$$-J^{\hat{g}}_{\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)\left[J^{\hat{g}}_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)\right]^{-1}J_{I\setminus\{i\}|I\setminus\{i\}}\left(\frac{n}{m},\bar{s}_{I\setminus\{i\}}\right)(s_i-s_i^0)-$$

$$-C_{\{i\}|I\setminus\{i\}}(s^0_{I\setminus\{i\}}-\hat{s}_{I\setminus\{i\}})(s_i-s_i^0)-(M_1+M_3)(s_i-s_i^0)^2.$$

В силу того, что все диагональные миноры матрицы $J(s)$ положительны, отображение $g(s)$ непрерывно дифференцируемо, а множество S замкнуто, найдутся константы $\overline{A}$ и $\underline{A}$ такие, что для любого подмножества АЭ $K\subseteq I$ для диагональной матрицы $J_{K|K}(s)$ выполнены следующие ограничения: $\underline{A}\le J_{K|K}(s)\le\overline{A}$, $s\in S$.

Выберем число промежуточных поверхностей m таким образом, что $\frac{1}{m}<\min\left(d_2',d_2,d_3,\frac{1}{4}\frac{\overline{A}}{\underline{A}}\frac{1}{M_3+M_1},\frac{1}{4}\frac{\overline{A}}{\underline{A}}\frac{1}{n\max\limits_{j\in I\setminus\{i\}}\left|C_{i,\,j}\right|}\right)$, тогда для всех отрезков $[s_i^0,s_i^1]\in S_{\hat{g}}$ справедлива следующая оценка:

$$\Delta(\bar{s}_{-i},s_i^1)-\Delta(\bar{s}_{-i},s_i^0)\ge\frac{1}{2}\frac{\det\left(J_{I|\{i\}}\left(\bar{s}_{C(g)},s^g_{-C(g)},\frac{n}{m}\right)_{C(g)\mathbf{U}\{i\}|C(g)\mathbf{U}\{i\}}\right)}{\det\left(J_{I|\{i\}}\left(\bar{s}_{C(g)},s^g_{-C(g)},\frac{n}{m}\right)_{C(g)|C(g)}\right)}\Delta s_i>0.$$

Таким образом, на каждом из множеств $S_{\hat{g}}$, $g \in \wp^{n-1}$ приращение $\Delta(\bar{s}_{-i}, s_i^1)$ строго положительно, откуда в силу непрерывности $G(s)$ получаем, что для любого $\bar{s}_{I\setminus\{i\}} \in R^{n-1}$ выполнено неравенство

$$G_i\left(s_i^{A^i} + \frac{n+1}{m}, G^{-1}_{s^{A^i}+\frac{n+1}{m}}\left(G_{C(M^i)}(s)\right)\right) \geq G_i(s) \geq G_i\left(s_i^{A^i}\ \frac{n}{m}, G^{-1}_{s^{A^i}+\frac{n}{m}}\left(G_{C(A^i)}(s)\right)\right),$$

из которого следует, что для механизма $x = g(s)$, $s \in S$ выполнено условие С.3, для этого механизма выполнены условия теоремы 1 и для него существует эквивалентный прямой механизм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.

2. *Новиков Д.А.* Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. *II.* Механизмы стимулирования // А и Т. 1997. N 3. С. 161 - 167.

3. ***Border K.S., Jordan J.S.*** Straightforward Elections, Unanimity and Phantom Voters // Rev. of Econom. Stud. 1983. P. 153-170.

4. ***Chichilnisky G., Heal G.M.*** The geometry of implementation: a necessary and sufficient conditions for straightforward games // Social Choice Welfare. 1997. V. 14. № 2. P.259-294.

5. ***Moulin H.*** Generalized Condorcet-Winners for Single Peaked and Single Plateau Preferences // Social Choice Welfare. 1984. P. 127-147.

6. ***Saterthwaite M.*** Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions // J. of Econom. Theory. 1975. V. 10. № 2. P. 187-217.

7. *Петраков С.Н.* Достаточные условия неманипулируемости прямых механизмов планирования / Сб. докл. междунар. науч.-практ. конф. «Управление большими системами». М.: ИПУ РАН, 1998. С. 68-72.

8. *Петраков С.Н.* Условия существования эквивалентных прямых механизмов планирования для непрямых механизмов планирования общего вида / Сб. тр. молодых ученых ИПУ РАН. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000.

9. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

10. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1985.

11. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.